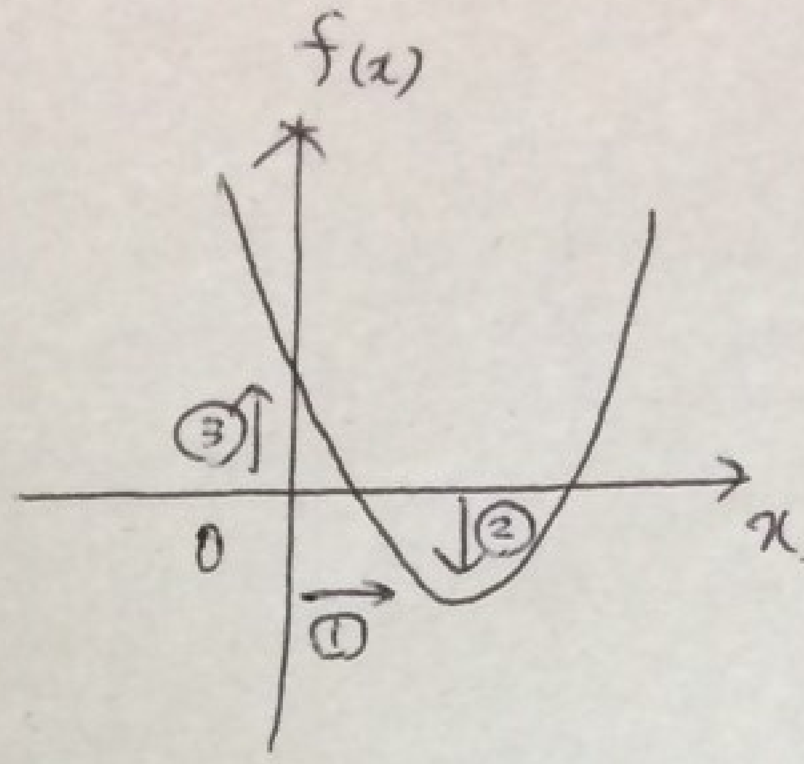
まず a の範囲を考える.

2つの解はともに正なので

$f(x)=x^2-ax+5$ として

$f(x)=(x-\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}+5$ とすると

頂点 $(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}+5)$



$$\begin{cases} \frac{a}{2}>0 & \cdots ① \\ -\frac{a^2}{4}+5<0 & \cdots ② \\ f(0)>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

これを満たさなければならない.

① より $a>0$

② より $a<-2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}<a$

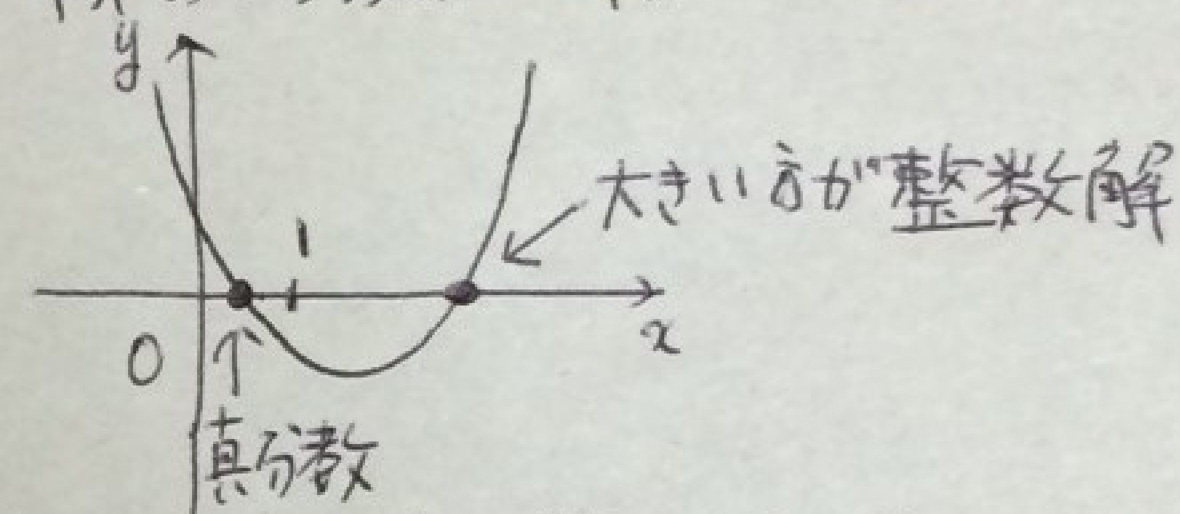
③ は常にみたす

共通範囲は $2\sqrt{5}<a$.

$a<7$ とあわせて

$2\sqrt{5}<a<7$ である.

解のうち片方は真分数なので



大きい方が整数解となるのは明らかである

次に実数解のとりうる範囲を考える.

$x^2-ax+5=0$

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-20}}{2}$$

大きい方は

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-20}}{2}$$

a が大きいほど大きくなるので最大の候補は $a=7$ を代入して

$\frac{7+\sqrt{29}}{2}$ である.

$5<\sqrt{29}<6$

$12<7+\sqrt{29}<13$

$6<\frac{7+\sqrt{29}}{2}<\frac{13}{2}=6.5$

よって整数解の可能性として

最大は6である。

ここから下で解を1〜6まで調べたのでもよいと思う.

また、軸に着目して

$\sqrt{5} < \frac{a}{2} < \frac{7}{2}$

$2.\cdots$ 　 3.5

よって軸は $2 < \frac{a}{2}$ なので

整数解の可能性の最小値は3である。

以上より

整数解の可能性は 3、4、5、6.

i) 3のとき

$$\frac{a+\sqrt{a^2-20}}{2} = 3$$
$$\sqrt{a^2-20} = 6-a$$
$$a^2-20 = a^2-12a+36$$
$$a = \frac{14}{3}$$

元の式に代入して

$$x^2 - \frac{14}{3}x + 5 = 0$$
$$3x^2 - 14x + 15 = 0$$
$$(3x-5)(x-3) = 0$$
$$x = \frac{5}{3}, 3$$

真分数でないので不適

ii) 4のとき

$$\frac{a+\sqrt{a^2-20}}{2} = 4$$
$$\sqrt{a^2-20} = 8-a$$
$$a^2-20 = a^2-16a+64$$
$$a = \frac{21}{4}$$

元の式に代入して

$$x^2 - \frac{21}{4}x + 5 = 0$$
$$4x^2 - 21x + 20 = 0$$
$$(4x-5)(x-4) = 0$$
$$x = \frac{5}{4}, 3$$

不適

iii) 5のとき

$$\frac{a+\sqrt{a^2-20}}{2} = 5$$
$$\sqrt{a^2-20} = 10-a$$
$$a^2-20 = a^2-20a+100$$
$$a = 6$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$(x-5)(x-1) = 0$$
$$x = 5, 1$$

不適

iv) 6のとき

$$\frac{a+\sqrt{a^2-20}}{2} = 6$$
$$\sqrt{a^2-20} = 12-a$$
$$a^2-20 = a^2-24a+144$$
$$a = \frac{41}{6}$$
$$x^2 - \frac{41}{6}x + 5 = 0$$
$$6x^2 - 41x + 30 = 0$$
$$(x-6)(6x-5) = 0$$
$$x = 6, \frac{5}{6}$$

適する

以上より

$$a = \frac{41}{6}$$ …答